

Tudományos Diákköri Dolgozat

Rezgésvizsgálat szimbolikus nyelvi környezetben

Füstös Attila
Nasztanovics Ferenc
II. éves építőmérnök hallgatók

Budapest, 1999

Konzulensek:

Dr. Paláncz Béla

Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék

Dr. Györgyi József

Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Tartalomjegyzék

Jelölések	3
1. Bevezetés.....	4
2. Fizikai modell.....	4
3. Matematikai modell.....	5
4. Modell paraméterek meghatározása	5
5. A matematikai modell lehetséges megoldási módszerei.....	6
6. A megoldási módszerek számítógépi megvalósítása	7
8. A számítógépi megoldás menete	8
9. Alkalmazási példa	9
10. További kutatási lehetőségek	142
11. Összefoglalás.....	144
Felhasznált irodalom.....	155
+ Melékletek	

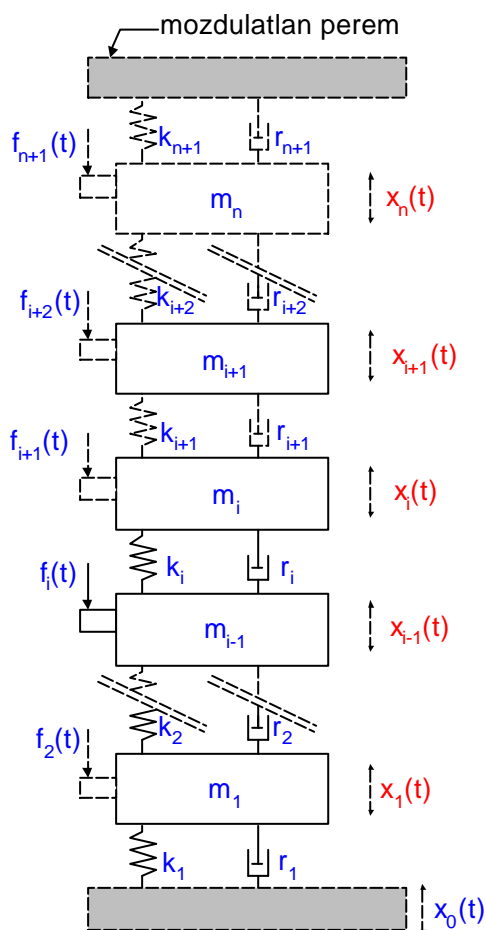
Jelölések

- a – diszkretizált elem magassága [m]
 A – keresztmetszet területe [m²]
 F – külső erő [kN]
 k – rugómerevség [kN/m]
 m – a tömeg [t]
 r – sebességgel arányos csillapítás [kN*s/m]
 s – transzformált függvény változója
 t – az idő [s]
 $x(t)$ – az elmozdulás függvény [m]
 $X(s)$ – transzformált függvény
- γ – belső csillapításra jellemző konstans
 w – saját-körfrekvencia [1/s]
 ρ – sűrűség [kN/m³]
- i – index, amely az adott csomópont száma
 $n+1$ – az utolsó tömegpont sorszáma

1. Bevezetés

Jelen dolgozat célja, egy több-szabadságfokú, lineáris rendszer dinamikájának gerjesztett rezgésének vizsgálata. A tömegpontokból álló fizikai modellhez tartozó matematikai modellt, amely másodrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer alakban adható meg, a szimbolikus számítógépi algebrán alapuló Maple programnyelv segítségével oldottuk meg. A programrendszer lehetőséget ad mind numerikus, mind analitikus megoldásra, valamint az eredmények grafikus megjelenítésére, vizualizációjára továbbá a dinamika animációjára is. A szimbolikus nyelvi környezet alkalmazásával mutatjuk be egy valós mechanikai feladat megoldását, hangsúlyt fektetve ezen környezet adta új lehetőségekre.

2. Fizikai modell



I. ábra

A fent említett több szabadságfokú rendszer viselkedésének fizikai leírásáról az irodalomban, az itt látható általános modellel találkoztunk Györgyi, 1995. Az egyes tömegcsomópontok közötti kapcsolat az ábrán látható módon rugókkal és lengéscsillapítókkal valósul meg. (I. ábra)

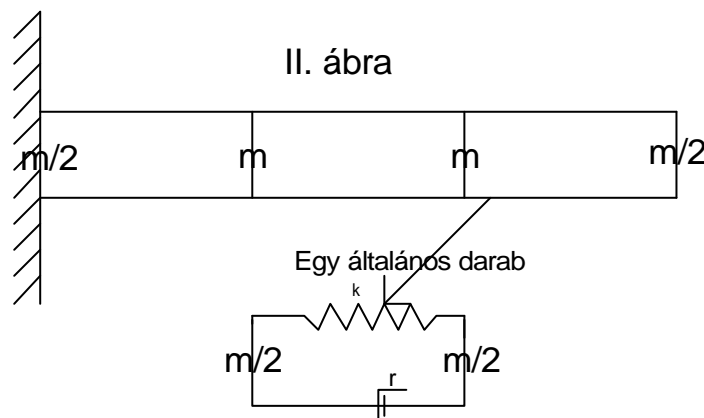
3. Matematikai modell

A matematikai modellt egy általános tömegpontra, a dinamikai egyensúlyi egyenlet alapján írjuk fel. Így az i -edik tömegpontra alkalmazható egyenlet a modellünk esetében:

$$m_i \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i(t) \right) + r_i \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} x_i(t) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} x_{i-1}(t) \right) \right) + r_{i+1} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} x_i(t) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} x_{i+1}(t) \right) \right) + k_i (x_i(t) - x_{i-1}(t)) + k_{i+1} (x_i(t) - x_{i+1}(t)) = f_i(t)$$

4. Modell paraméterek meghatározása

Modellünk tetszőlegesen paraméterezhető, mivel azonban mi építőmérnökök készülünk lenni, ezért olyan példát választottunk bemutatásra, amely épület modellekhez áll a legközelebb. Mi egy rúd hosszirányú dinamikus elmozdulásait modellezzük. A diszkrétizálást a rúd azonos hosszúságú darabokra való bontásával végeztük el úgy, hogy egy ilyen részlet aljára és tetejére a fél tömeget helyeztük (II. ábra) Györgyi, 1997. A modell paramétereiket olyanra próbáltuk megválasztani, amelyek a legközelebb állnak egy valós épület hasonló paramétereire. Mivel sem mi, sem a programrendszerünk nem állnak még azon a szinten, hogy ezeket a modelleket épület modelleknek nevezzük, valamint mivel nekünk elsősorban a modell rezgés-vizsgálata a célunk, ezért a megoldás során nem fogunk épületekrol beszélni, mégis ezek rugóállandóval, csillapításaival és tömegeivel fogunk számolni.



- I. Az egy általános csomópontra jutó tömeget (m) a méretből (magasságból (a), keresztmetszet területéből (A)) és a suruségból (r) határoztuk meg. A rúd végén lévő csomópontban – a felosztásból adódóan – ennek csak a fele található:

$$m = A \cdot a \cdot r$$

- II. Egy adott elem rugómerevségét (k) a rugalmassági modulusból (E), a keresztmetszet területéből (A) és a magasságából (a) határoztuk meg:

$$k = \frac{E \cdot A}{a}$$

- III. A csillapítást (r) a rugóállandókból (k), a saját-körfrekvenciából (w), és a belső csillapításra jellemző konstans (g) segítségével határoztuk meg. A saját-körfrekvenciákat a tömeg-mátrixból (M) és a rugó-mátrixból (K) állítjuk elő.

Eloszor a saját-körfrekvenciákat állítjuk elő a következő mátrixos kifejezésből:

$$\left(\underline{K} - \underline{M} \cdot w^2 \right) = 0$$

Végül magát a csillapítást a legkisebb saját-körfrekvencia alapján az alábbi alakban írjuk fel:

$$r = \frac{g}{w} \cdot k$$

5. A matematikai modell lehetséges megoldási módszerei

A választott matematikai modellt különböző módszerekkel oldhatjuk meg. Két módszert ismertetünk, illetve hasonlítunk össze, nevezetesen az általunk használt analitikus módszert, és a mérnöki gyakorlatban leginkább alkalmazott numerikus megoldást.

1. Analitikus megoldás

A mátrix differenciálegyenlet megoldása $2n$ méretű sajátérték-feladat megoldása után zárt alakban felírható a rezolvens mátrix segítségével. Közönséges lineáris differenciálegyenlet-rendszerrel lévén szó, kézenfekvő másik lehetőség valamely integrál-transzformáció alkalmazása. Ennek lényege, hogy a differenciálegyenlet-rendszer független változója helyett bevezetve új komplex változót, transzformálhatjuk át a differenciálegyenlet-rendszert algebrai egyenletrendszerre. Az algebrai többszemeretlenes egyenletrendszert megoldva, a csomópontok elmozdulásait az új transzformált változó függvényében kapjuk meg. A kapott összefüggéseket visszatranszformálva az idő tartományba adódik az egyes tömegcsomópontok elmozdulása az idő függvényében. Tehát megoldásként a tömegcsomópontok konkrét analitikus formában leírt elmozdulásait reprezentáló függvényeket kapunk. A módszer előnye, hogy a kapott megoldás analitikusan kezelhető, így például egyszerű deriválással előállítható bármely cso-

mópont sebessége, gyorsulása illetve az ismert analitikus módszerekkel kereshető szélső érték (optimalizálás), stb.

2. Numerikus megoldás

Ebben az esetben az n darab másodrendű lineáris differenciálegyenletből álló rendszert valamely az irodalomból ismert numerikus integrálási módszerrel, mint kezdeti érték feladatot megoldjuk. A megoldást diszkrét t_i időpontokban kapjuk meg, majd interpoláció segítségével kaphatunk képet a vizsgált tömegcsomópont tetszőleges t időpontban való viselkedéséről. A módszer hátránya, hogy két egymást követő vizsgált pont között nem tudunk semmit a tömegpont viselkedéséről. Numerikus algoritmusok megvalósításakor különös figyelmet kell szentelni a kerekítési és csonkítási hibák elkerülésére, illetve csökkentésére. Ezzel szemben az egyenletek számát, az egyenletrendszer méretét illetően a numerikus módszerek hatásosabbak, mint az analitikus megoldás, inkább alkalmas valós gyakorlati feladatok modellezésére, így ezt a módszert gyakrabban használják a mérnöki gyakorlatban.

6. A megoldási módszerek számítógépi megvalósítása

Az előbbieken tárgyalt megoldási módszereket átgondolva próbáltuk az eddigi megvalósításoktól eltérően megközelíteni a problémát. Nem numerikus módszert alkalmaztunk, hanem analitikusan oldottuk meg a fizikai, illetve matematikai modellek által már definiált feladatot. A szimbolikus programnyelvek bármelyikével (Maple, Mathematica, stb.) könnyen, egyszerűen kezelhető a probléma. Az erre alkalmas programrendszerek közül a Maple V-ös verzióját használtuk. Természetesen nem áll szándékunkban, hogy versenyezzünk a már régóta létező numerikus módszert alkalmazó más nyelven (általában Fortranban) írt programokkal *E. L. Wilson, 1973*, amelyek alkalmasak több ezer szabadságfokú rendszer vizsgálatára is, hanem az, hogy illusztráljuk a szimbolikus nyelvek adta lehetőségekből következő új szemléletmódot. Az analitikus megoldási módszer következményeként új eredmények, következtetések levonására lehet mód.

Miután a differenciálegyenletek általánosan analitikus módon a szimbolikus programnyelvi környezetben is csak maximum 4 ismeretlen függvény esetén oldhatók meg, így integráltranszformációt kellett alkalmaznunk, a magasabb szabadságfokú rendszerek kezeléséhez.

Az szakirodalomban *Csáki, 1977* található módszerek közül a Laplace transzformációt választottuk, mert ennek segítségével meg lehet oldani nem abszolút integrálható feladatokat is. A Laplace transzformáció leírása részletesebben megtalálható a fenti irodalomban, itt most csupán rövidebb lényegét foglaljuk össze:

A Laplace transzformáció esetén egy adott $f(t)$, $t > 0$ vagy $t = 0$ időfüggvényhez, hozzárendelünk egy $F(s)$ képfüggvényt az alábbi módon *Westerman, 1997*:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

A transzformáció inverze, a komplex tartományban értelmezett inverz Laplace-integrállal állítható elő:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{w=-\infty}^{w=\infty} F(d+iw) \cdot e^{(d+iw)t} dw$$

8. A számítógépi megoldás menete

Program első részében definiáljuk a matematikai modell által meghatározott differenciál-egyenlet-rendszert, alkalmazzuk a Laplace transzformációt, majd egyszerűsítéseket teszünk.

Felírva egy általános i -edik csomópont differenciálegyenletét:

$$m_i \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i(t) \right) + r_i \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} x_i(t) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} x_{i-1}(t) \right) \right) + r_{i+1} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} x_i(t) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} x_{i+1}(t) \right) \right) + k_i (x_i(t) - x_{i-1}(t)) + k_{i+1} (x_i(t) - x_{i+1}(t)) = f_i(t)$$

Tekintsük ennek Laplace transzformáltját:

$$(-r_i s - k_i) X_{i-1}(s) + (r_i s + r_{i+1} s + k_i + k_i + m_i s^2) X_i(s) + (-r_{i+1} s - k_{i+1}) X_{i+1}(s) - r_i x_i(0) - m_i s x_i(0) - m_i \left(\frac{\partial}{\partial t} x_i(0) \right) - r_{i+1} x_i(0) + r_i x_{i-1}(0) + r_{i+1} x_{i+1}(0) = F_i(s)$$

Az egyenletet $X_i(s)$ együtthatói szerint rendezve, a csomópontok transzformált függvényeinek együtthatóit kapjuk :

$$a_i X_{i-1}(s) + b_i(s) X_i(s) + c_i X_{i+1}(s) = d_i(s)$$

$$a_i(s) = -r_i s - k_i \quad b_i(s) = m_i s^2 + r_i s - r_{i+1} s + k_i + k_{i+1} \quad c_i = -r_{i+1} s - k_{i+1}$$

$$d_i(s) = F_i(s) + m_i s x_i(0) + m_i \left(\frac{\partial}{\partial t} x_i(0) \right) + r_i x_i(0) - r_i x_{i-1}(0) + r_{i+1} x_i(0) - r_{i+1} x_{i+1}(0)$$

Az egyenletrendszer felírható tömörebb, mátrixos formában:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & & & a_{n+1} & b_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \\ \vdots \\ X_{n+1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(s) - a_1 X_0(s) \\ d_2(s) \\ d_3(s) \\ \vdots \\ d_{n+1}(s) \end{bmatrix}$$

Itt az együttható mátrix egy tridiagonális szalagmátrix. Az egyenletrendszer specialitását felhasználva a szokásos numerikus inverz számítási eljárások helyett, használhatjuk a Thomas algoritmus *Bruce A. Finlayson, 1980* szimbolikus változatát, amely eredményül az $X(s)$ vektort szolgáltatja. Az $X(s)$ vektor, az egyes csomópontok elmozdulás függvényének Laplace transzformáltját jelenti, és ezek visszatranszformálásával megkapjuk a csomópontok elmozdulásának idő függvényét. Ez a módszer lesz a bemutatott példa megoldásának alapja.

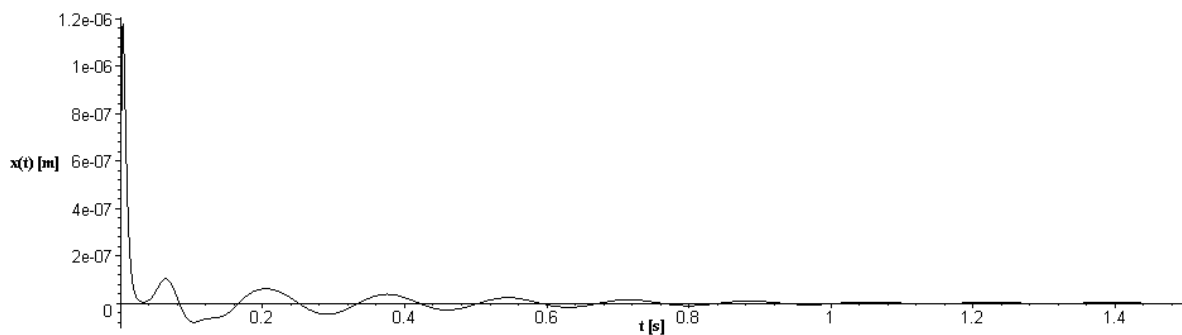
9. Alkalmazási példa

Egy 50 méter magas folytonos (szerkezet) rúd hosszirányú rezgésének vizsgálata. A diszkrétizáció száma tíz, a paraméterek a táblázatban láthatók. A gerjeszto függvény a Dirac-delta függvény volt, amely 0 idő alatt bevitt egységnyi energia betáplálást testesít meg és a dinamikai vizsgálatok esetében egy szokásos gerjesztésként alkalmazzák:

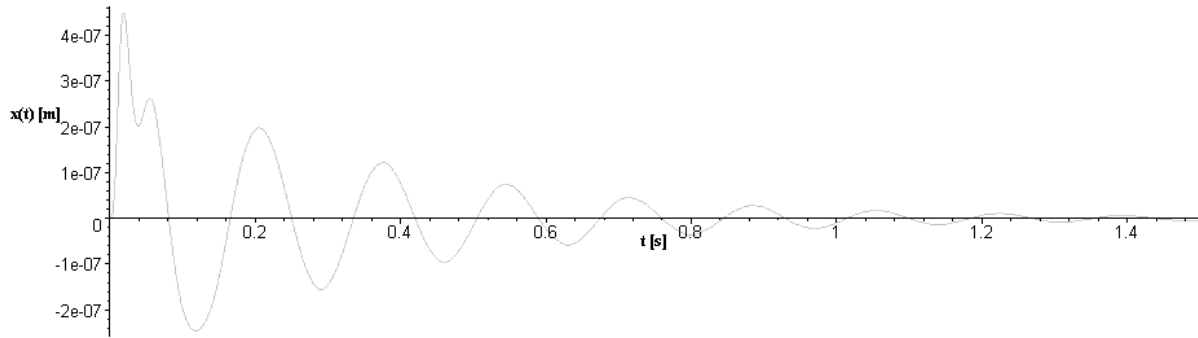
Sorszám:	Tömeg: [t]	Rugómerevség [kN/m]	Csillapítás [kN s/m]	Helyének koordinátája:
1.	87.500	4.900.000	20.475,88	10
2.	87.500	4.900.000	20.475,88	20
3.	87.500	4.900.000	20.475,88	30
4.	87.500	4.900.000	20.475,88	40
5.	87.500	4.900.000	20.475,88	50
6.	87.500	4.900.000	20.475,88	60
7.	87.500	4.900.000	20.475,88	70
8.	87.500	4.900.000	20.475,88	80
9.	87.500	4.900.000	20.475,88	90
10.	43.750	4.900.000	20.475,88	100

Az alábbiakban csak néhány jellegzetes példát mutatunk be az eredmények illusztrálásaként, a teljes Maple program és a további eredmények az I. számú mellékletben található.

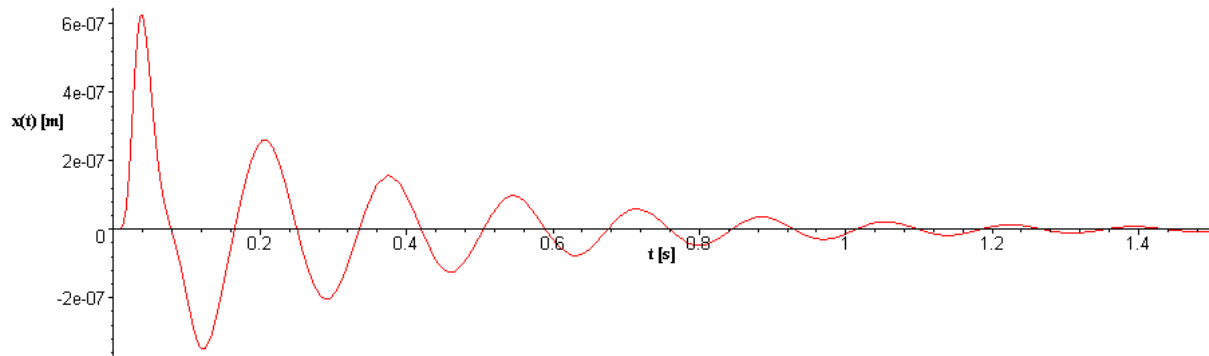
1. Az első csomópont elmozdulása az időben:



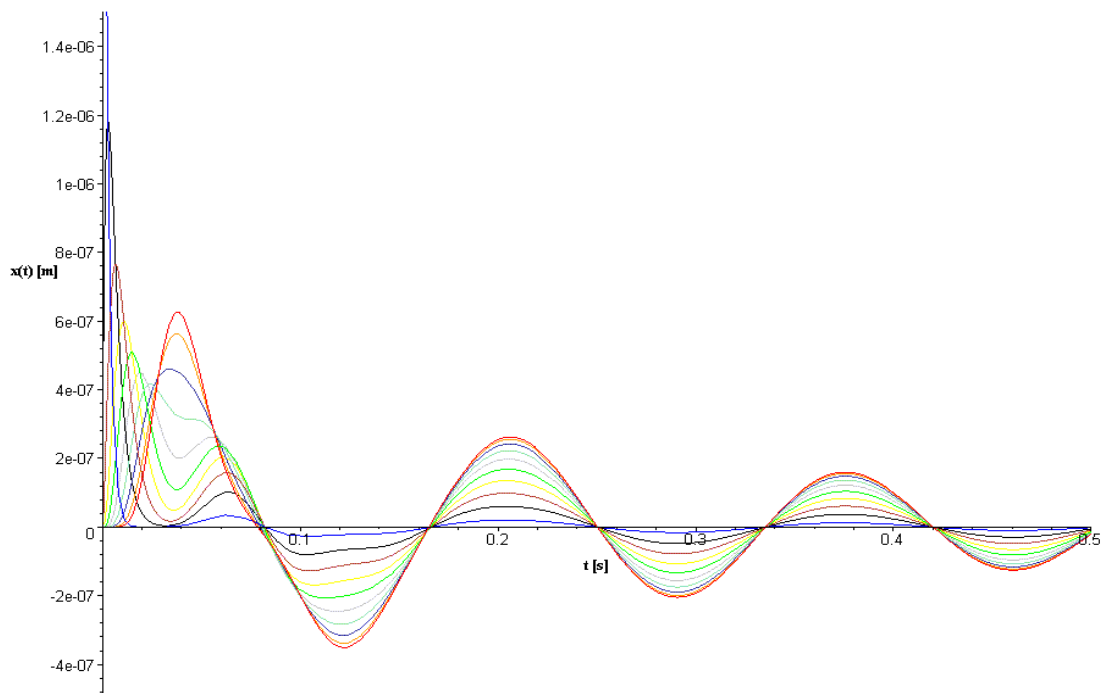
2. Egy általános csomópont (esetünkben az ötödik) elmozdulása az időben:



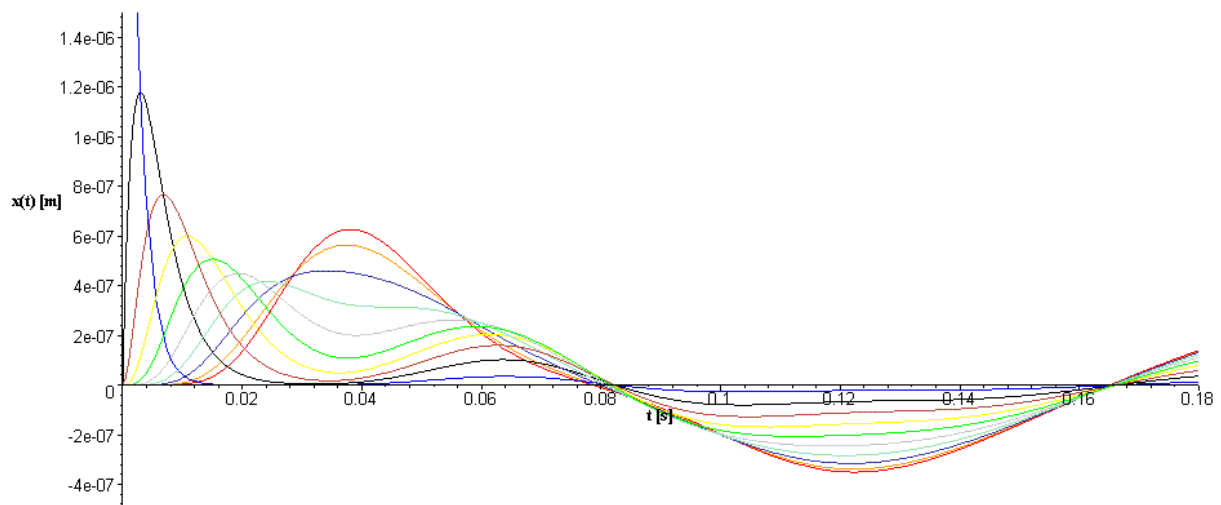
3. Az utolsó csomópont elmozdulása az időben:



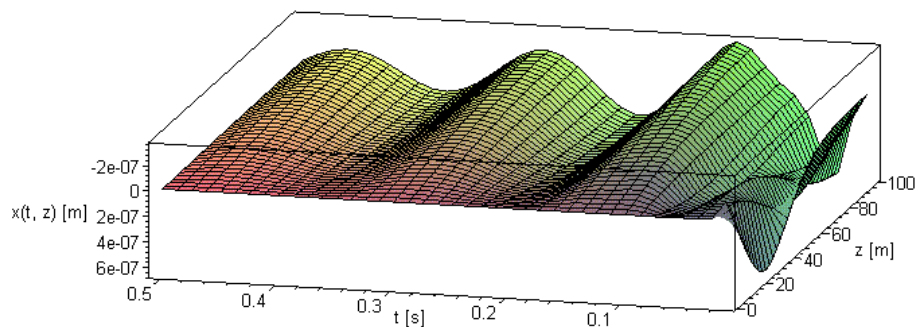
4. Az összes csomópont elmozdulása az időben, egy koordináta tengelyben:



5. Az összes csomópont elmozdulásának első periódusa, egy koordináta tengelyben:



6. Végül, ha a csomópontok mentén interpoláljuk (közelítjük) a rúd valódi alakváltozását bármely időpillanatban és bármely pontjában a rúdnak, az alábbi függvényt kapjuk, ahol t az idő tengely, z a rúd hosszirányú tengelye és $x(t,z)$ amely az adott pont, adott időbeni elmozdulása:



A megoldás grafikonokból lezűrhető eredmények:

- A magasabb frekvenciák az első periódus végére gyakorlatilag kihálnak a rendszerből a csillapítási modell miatt (lásd: 4, 5 grafikon).
- A csomópontok a befüggesztéstől távolodva egyre nagyobb amplitúdóval rezegnek.

10. További kutatási lehetőségek

A szimbolikus nyelvek igen dinamikus fejlődnek, egyre több és több új eljárást írnak meg hozzájuk, amelyek mérnöki feladatok egyre szélesebb körének megoldását teszik majd lehetővé. Véleményünk szerint ezen programrendszerek elobb-utóbb létjogosultságot nyernek az építőmérnöki szakmában is, hiszen az informatika gyors fejlődése később minden bizonyosan lehetővé fogja tenni, hogy akkora sebességu és memória helyu számítógépek kerüljenek a piacra, amelyek megfelelnek majd egy ekkora számítási igénynek.

További kutatási terület lehet a rendszer általános gerjeszto függvény esetére való analitikus megoldása. Ennek az a lényege, hogy a talaj elmozdulás függvényeként nem egy konkrét függvény, hanem egy szimbolikus $f(t)=A \sin(\mathbf{w} t + \mathbf{j})$ alakú kerül. Az így előállított elmozdulás-függvényekben az ido paraméter (t) mellett a körfrekvencia (\mathbf{w}), a fáziseltolás (\mathbf{j}) és az amplitúdó (A) is független paraméterként fog szerepelni. Miután bármely függvény közelíthető Fourier sorral, azaz ilyen $f(t)$ típusú függvények összegével, másrészt a rendszer lineáris volta miatt a szuperpozíció elvét használhatjuk, így ezzel a módszerrel tetszoleges gerjeszto függvényhez tartozó általános analitikus rendszer válasz állítható elő. Ez a megoldás lehetővé teszi, hogy tetszoleges paraméter értékek mellett (A , \mathbf{w} , \mathbf{f}) előállítható az idobeni megoldás függvény anélkül, hogy a modell egyenleteket újra meg kéne oldani. Most ezt illusztrálandó megoldunk egy három-csomópontos esetet a II. számú mellékletben.

Rezgés vizsgálat szimbolikus nyelvi környezetben
Füstös Attila, Nasztanovics Ferenc

Konzulensek: Dr. Paláncz Béla
Dr. Györgyi József

11. Összefoglalás

Vizsgálataink során csak kis elemszámú feladatokat sikerült megoldani, mert több csomópont esetén a futási idő és a memória igény drasztikusan megnőtt. Ezen tapasztalat fényében egyértelműen kijelenthetjük, hogy a mai szimbolikus programrendszerek még nem alkalmasak nagy mértékű feladatok megoldására. Mivel azonban az ilyen nyelvekben könnyen és gyorsan tudunk kis modelleket kiszámolni (akár paraméteresen is), valamint szemléletes grafikonokat, animációkat vagyunk képesek előállítani rövid idő alatt, így ezen rendszerek kiválóan alkalmasak lehetnek lokális problémák gyors megoldására, illetve az oktatásban feladatok szemléletes bemutatására. Mindezek mellett azonban egy másik lehetőség a numerikus és szimbolikus eljárások együttes alkalmazása, amelynek során a végrehajtandó algoritmusok bizonyos részeit szimbolikusan oldják meg, ezáltal csökkentve az időigényes numerikus eljárásra fordítandó energiát. Ez különösen a rosszul kondicionált (kerekítési hibahalmozódásra különösen érzékeny) algoritmusok esetén előnyös, mivel a szimbolikus megoldás önmagában biztosítja a numerikus stabilitást és így nincs szükség speciális numerikus eljárások alkalmazására.

Füstös Attila

Nasztanovics Ferenc

Felhasznált irodalom

Györgyi József:

Dinamika, *Egyetemi jegyzet, Muegyetemi kiadó, 1995*

Györgyi József:

Tartók dinamikája, *Egyetemi jegyzet kézirat, 1997*

Csáki Frigyes:

Irányítástechnikai kézikönyv, *Egyetemi jegyzet, Muegyetemi kiadó, 1977*

Rózsa Pál:

Lineáris algebra és alkalmazásai, *Muszaki könyvkiadó, 1976*

Bruce A. Finlayson:

Nonlinear analysis in chemical engineering, *McGraw-Hill, 1980*

A. Hoffmann:

Regelung mit SIMULINK, *Addison – Wesley, 1998*

Westerman:

Mathematik für Ingenieures mit Maple, *Springer, 1997*

Bathe, K. J. and Wilson, E. L.:

Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics, *Int. J. num. Meth. Engng, 1973*